Небольшие изменения в постановке краевой задачи Коши, когда последняя производная произвольна и допускается ее разрыв на границе областей, а заданной считаем компоненту $v_1(x_{i+1})$ на правой стороне отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, позволяет использовать метод для сплайновой интерполяции.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (базовая часть государственного задания, задание № 340/2015, проект № 1416).

Литература

1. Марчук Г. И. *Методы вычислительной математики.*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.
2. Bers L., Gelbart A. *On a class of function defined by partial differential equations* // Trans. Amer. Math. Soc. 1944. V. 56. No 1. P. 67–93, 232–256.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. Егоров

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
egorov@im.bas-net.by

Нахождение вероятностных характеристик решений стохастических уравнений является одной из важных задач, возникающих при исследовании таких уравнений, а также при их применении в приложениях. В общем случае получение числовых значений характерик сводится к вычислению функционалов вида $E[f(X_{(\cdot)})]$, где $X_{(\cdot)}$ — решение стохастического уравнения, f — функционал, заданный на траекториях решения, E обозначает математическое ожидание. В данном докладе мы ограничиваемся рассмотрением стохастических дифференциальных уравнений, содержащих стохастические интегралы типа Ито. К настоящему времени наиболее исследована задача нахождения ожиданий от решений в случае, когда $f(X_{(\cdot)} = g(X_t)$, где $g(\cdot)$ — функция вещественной переменной [1, 2]. Рассмотрение общего случая произвольных функционалов, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости, было начато в работах, посвященных приближенному вычислению функциональных интегралов по мерам, порождаемым случайными процессами [3]. Применение схем, основанных на использовании дискретных аппроксимаций решения и методов статистического моделирования малоэффективно, в силу необходимости аппроксимации также и функционала от решения, что приводит к существенному увеличению вычислительной сложности алгоритмов. Поэтому в подходе, предложенном в [3, 4], используются квадратурные формулы для вычисления математического ожидания функционала, аппроксимационно точные для функциональных многочленов от решения рассматриваемого уравнения, в сочетании со стохастическими аппроксимациями решения. В случае линейных уравнений построены формулы, точные для функциональных многочленов заданной степени от решения [5, 6]. В работе [7] разработан метод, основанный на использовании вспомогательных некоммутирующих операторов, для получения аппроксимаций математического ожидания решения системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений, описывающих реакцию веществ с учетом их диффузии. Целью настоящего исследования является расширение указанных в приведенных ссылках методов вычисления математических ожиданий функционалов от решений стохастических уравнений на уравнения с частными производными. В связи с этим рассматривается вопрос построения приближенных формул для вычисления ожиданий функционалов от случайных процессов со значениями в бесконечномерных пространствах. Ниже используются определения из [3, 8, 9].

Пусть $\mathfrak{H}$ сепарабельное гильбертово пространство, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $X = X(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$, — гауссовский случайный процесс, принимающий значения в $\mathfrak{H}$. Обозначим $\langle \xi, X \rangle = \int_0^T (\xi(t), X(t))_{\mathfrak{H}}\, dt$, где $\xi(t)$, $t \in [0,T]$, — детерминированная функция, принимающая значения в $\mathfrak{H}$. Тогда $E[\exp\{\langle \xi, X\rangle\}] = \exp\{(K\xi, \xi)_{\mathfrak{H}} \otimes [0,T]\}$, где $(K\xi, \xi)_{\mathfrak{H}} \otimes [0,T] = (RQ\xi, \eta)_{\mathfrak{H}\otimes[0,T]} = \int_0^T \int_0^T R(t,s)(\xi(t), \eta(s))_{\mathfrak{H}}\, dt\, ds$; K — линейный оператор в $\mathfrak{H} \otimes [0,T]$, заданный ядром $B(t,s) = R(t,s)(Q\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$, Q — ядерный оператор в $\mathfrak{H}$ и $R(t,s)$ — вещественнозначная симметричная функция, определяющая гауссовское распределение процесса X. В частном случае Q-винеровского процесса W $B(t,s) = \min(t,s)(Q\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$, и имеет место представление $W_t = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k$, где $\beta_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(W(t), e_k)_{\mathfrak{H}}$, $k = 1, 2, \ldots,$ — вещественнозначные взаимно независимые винеровские процессы, e_k, λ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ — ортонормированные собственные функции, образующие базис в $\mathfrak{H}$, и соответствующие собственные значения оператора Q. Полученное выражение для характеристического функционала процесса $X(t, \omega)$ может быть использовано для вычисления моментов и математического ожидания функциональных многочленов от траекторий процесса. В частности, для Q-винеровского процесса смешанный момент второго порядка от линейных функционалов имеет вид:

$$E[\langle \xi, X\rangle \langle \eta, X\rangle] = (R(\xi, \eta))_{\mathfrak{H}\otimes[0,T]} = \int_0^T \int_0^T \min(t,s)(Q\xi(t), \eta(s))_{\mathfrak{H}}\, dt\, ds.$$

С учетом равенства нулю математического ожидания процесса получена приближенная формула третьей степени точности

$$E[F(X(\cdot))] = \Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\Big) F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2T} \int_{-T}^{T} F(1_{[0,\cdot]}(|u|)\, \mathrm{sign}\,(u) e_k)\, du. \tag{1}$$

и соответствующая составная (в терминологии, принятой в [3]) формула, также имеющая третью степень точности

$$E[F(X(\cdot))] = E\Big[F\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \sum_{j=1}^{N} \xi_{kj} \gamma_j(\cdot) e_k\Big)\Big] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2T} \int_{-T}^{T} F(1_{[0,\cdot]}(|u|)\, \mathrm{sign}\,(u) e_k)\, du -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2T} \int_{-T}^{T} F\Big(\mathrm{sign}\,(u) \sum_{j=1}^{N} (1_{[0,*]}(|u|), \gamma_j(*))_{\mathcal{H}_W} \gamma_j(\cdot) e_k\Big)\, du,$$

где $\xi_{kj} = (\beta_k, \gamma_j)_{\mathcal{H}_W} \equiv (\beta_k(*), \gamma_j(*))_{\mathcal{H}_W}$, $\mathcal{H}_W$ — пространство Камерона — Мартина, порожденное случайным процессом $\beta_k(t)$; γ_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}_W$.

Приближенные формулы, точные для функциональных многочленов произвольного порядка могут быть с использованием (1) выписаны в соответствии с общей методикой построения таких формул для функциональных интегралов в линейных пространствах [3]. Рассмотрено применение полученных формул к вычислению математического ожидания функционалов от решений линейных стохастических дифференциальных уравнений, содержащих стохастические интегралы по Q-винеровскому процессу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф15-035).

Литература

1. Kloden P. E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations.* Springer, 1992.

2. Кузнецов Д. Ф. *Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений.* С.-Пб.: Изд-во С.-Пб. гос. ун-та, 2001.

3. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications*. Kluwer Acad. Publ., 1993.

4. Egorov A. D., Zherelo A. V. *Approximations of functional integrals with respect to measure generated by solutions of stochastic differential equations* // Monte Carlo Methods and Applications. 2004. V. 10. P. 257–264.

5. Egorov A. D., Sabelfeld K. K. *Approximate formulas for expectation of functionals of solutions to stochastic differential equations* // Monte Carlo Methods and Appl. 2010. V. 16. P. 95–127.

6. Egorov A. Д. *О приближенном вычислении математического ожидания функционалов от решения линейного уравнения Ито — Леви* // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59. № 1. С. 13–17.

7. Maliutin V. B. *Approximation of solution of the system of nonlinear stochasic differential equations* // Computational methods in applied mathematics. 2005. V.5. № 4. P. 410–421.

8. Далецкий Ю. Л. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* М.: Наука, 1983.

9. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochasic Equations in Infinite Dimensions* Cambridge Univercity Press, 1992. P. 232–256.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЛЕСНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

В.В. Игнатенко, Т.А. Любецкая

Белорусский государственный технологический университет, Минск, Беларусь
{ihnatsenko,lutanya}@tut.by

Дифференциальные уравнения широко применяются в различных областях народного хозяйства, при исследовании и проектировании технологических процессов. Покажем их применение в лесной промышленности на примере рационального выбора подающего устройства для раскряжевочной установки (раскряжевочная установка — это машина, которая производит распиловку хлыстов (ствол дерева без сучьев) на бревна нужной длины) [1].

Раскряжевочная установка может находиться в следующих состояниях: S_0 — установка исправна и простаивает из-за отсутствия хлыстов, S_1 — установки осуществляет раскряжевку хлыстов. Обозначим через $P_0(t)$ вероятность того, что в момент времени t установка находится в состоянии S_0, $P_1(t)$ — в состоянии S_1. Для любого момента времени t: $P_0(t) + P_1(t) = 1$.

Математическая модель функционирования раскряжевочной установки представляет систему дифференциальных уравнений Колмогорова

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \lambda P_0 + \mu P_1, \quad \frac{dP_1(t)}{dt} = -\mu P_1 + \lambda P_0. \tag{1}$$

В первое уравнение системы (1) подставим вместо P_1 его выражение $P_1 = 1 - P_0$ и решим при $P_0(0) = 1$. Получим

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad P_1 = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{2}$$

Переходя к пределу при $t \to \infty$ найдем финальные вероятности. В установившемся режиме имеем:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad P_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad \lambda = \frac{1}{t_1}, \quad \mu = \frac{1}{t_0},$$

где t_1 — среднее значение времени между поступлениями предметов труда на обработку; t_0 — средняя продолжительность цикла обработки. Вероятность P_1 представляет собой коэффициент использования рабочего времени.